CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova in itinere 2023-11-27

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un'urna contiene una 5 palline, di cui $R \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ rosse e le rimanenti blu. Il numero R non è noto. Veniamo poi informati che sono state effettuate 3 estrazioni e si è osservato nell'ordine una pallina rossa, una blu e una rossa. Tuttavia non siamo stati informati se le estrazioni sono effettuate tutte con rimpiazzo o tutte senza rimpiazzo (non supponiamo ulteriori alternative).

1. Fornire una stima di massima verosimiglianza per R, supponendo di sapere che le estrazioni siano con rimpiazzo.
2. Fornire una stima di massima verosimiglianza per R, supponendo invece di sapere invece che siano senza rimpiazzo.
3. Posta invece $M \in \{\text{con rimpiazzo}, \text{senza rimpiazzo}\}$, fornire una stima di massima verosimiglianza per la variabile congiunta (M, R).

Una soluzione:

1. Scriviamo la verosimiglianza per $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, dove A è l'evento osservato (rossa-blu-rossa) e $C =$ "estrazioni con rimpiazzo".

$$L_C(i) = L(R = i; A) = P(A|R = i, C) = \frac{i}{5} \cdot \frac{5-i}{5} \cdot \frac{i}{5} = \frac{i^2(5-i)}{5^3}. \tag{1}$$

A questo punto dobbiamo massimizzare la funzione $i \mapsto i^2(5-i)$ dove però i può assumere solo valori discreti. Calcolandone comunque la derivata si trova

$$\frac{d}{di} i^2(5-i) = 2i(5-i) - i^2 \tag{2}$$

e imponendo che si annulli si trova $\bar{i} \in \{0, 10/3\}$. Chiaramente $\bar{i} = 0$ è punto di minimo, mentre $\bar{i} = 10/3 = 3,\bar{3}$ non è accettabile come soluzione, quindi (sfruttando il fatto che L è (strettamente) crescente per $0 < i < 10/3$ e decrescente per $i > 10/3$), basterà confrontare $L_C(3) = 3^2 \cdot (5-3) = 18$ con $L_C(4) = 4^2 \cdot (5-4) = 16$. Si trova quindi che $R = 3$ è la stima di massima verosimiglianza per R.

In alternativa un calcolo esplicito della verosimiglianza nei 6 valori $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ rende

$$L(0) = \frac{0}{5^3}, \quad L(1) = \frac{4}{5^3}, \quad L(2) = \frac{12}{5^3}, \quad L(3) = \frac{18}{5^3}, \quad L(4) = \frac{16}{5^3} \quad L(5) = 0. \tag{3}$$

2. Scriviamo la verosimiglianza per $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, dove A è l'evento osservato (rossa-blu-rossa) e $S =$ "estrazioni senza rimpiazzo". Troviamo (aiutandosi eventualmente con un grafo)

$$L_S(i) = L(R = i; A) = P(A|R = i, S) = \frac{i}{5} \cdot \frac{5-i}{4} \cdot \frac{i-1}{3} = \frac{i(i-1)(5-i)}{5 \cdot 4 \cdot 3}. \tag{4}$$

A questo punto dobbiamo massimizzare la funzione $i \mapsto i(i-1)(5-i)$ dove però i può ancora assumere solo valori discreti. Calcolandone esplicitamente i valori si trova

$$L(0) = 0, \quad L(1) = 0, \quad L(2) = \frac{6}{60}, \quad L(3) = \frac{12}{60}, \quad L(4) = \frac{12}{60}, \quad L(5) = 0. \tag{5}$$

Quindi abbiamo trovato che sia $R = 3$ che $R = 4$ sono ugualmente valide stime di massima verosimiglianza.

3. Abbreviamo S = senza rimpiazzo, C = con rimpiazzo. Stavolta la verosimiglianza per la congiunta è

$$L((S, i); A) = L_S(i), \quad L((C, i); A) = L_C(i). \tag{6}$$

Basta quindi confrontare $L_S(3) = 12/60 = 24/120$ con $L_C(3) = 18/125$ e quindi otteniamo che una stima di massima verosimiglianza è M = "senza rimpiazzo", $R = 3$, ossia che le estrazioni sono senza rimpiazzo e ci sono 3 (inizialmente) tre palline rosse nell'urna. Ma anche $R = 4$ e M = "senza rimpiazzo" ha la stessa verosimiglianza, quindi è pure una stima valida.

Problema 2

Sia T una variabile aleatoria continua a valori reali, avente densità

$$f(t) = \begin{cases} c\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/2} & \text{per } t > 0, \\ 0 & \text{per } t \leq 0. \end{cases}$$

dove $c > 0$ è una opportuna costante.

1. Posta X una variabile aleatoria con densità gaussiana standard, calcolare la densità di X^2.
2. Determinare c e calcolare $\mathbb{E}[T]$.
3. Dire per quali $s \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{MGF}_T(s) < \infty$ (non è richiesto calcolarla).

Una soluzione:

1. Usiamo la formula di cambio di variabile con la funzione $g(x) = x^2$, che è invertibile rispettivamente su $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, con $g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$ per ogni $y > 0$ (escludiamo 0 dall'immagine per semplicità). Poiché $|g'(x)| = 2|x|$ e quindi $|g'(g^{-1}(y))| = 2\sqrt{y}$ per ogni $y > 0$, troviamo

$$p(X^2 = y) = p(X = \sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p(X = -\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}. \tag{7}$$

Pertanto la densità risulta uguale a f con $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

2. Dai calcoli svolti nel punto precedente, sappiamo che per $c = 1/\sqrt{2\pi}$ la funzione f risulta la densità di una variabile aleatoria. Poiché un tale c se esiste è unico, ne segue che $c = 1/\sqrt{2\pi}$ sarà il valore anche per la densità di T. Inoltre la densità di T è uguale a quella della variabile X^2 calcolata al punto sopra, quindi T e X^2 hanno la stessa legge e quindi

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty tp(T = t)dt = \int_0^\infty yp(X^2 = y)dy = \mathbb{E}\left[X^2\right]. \tag{8}$$

Ma abbiamo già visto a lezione che per una gaussiana standard si ha $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathrm{Var}(X) = 1$.

3. Possiamo procedere in due modi: o usando ancora che $\mathrm{MGF}_T(s) = \mathrm{MGF}_{X^2}(s)$ oppure ragionando direttamente sull'integrale che definisce MGF_T. Scegliamo il primo modo: poiché

$$\begin{aligned} \mathrm{MGF}_T(s) = \mathrm{MGF}_{X^2}(s) = \mathbb{E}\left[\exp\left(sX^2\right)\right] &= \int_{-\infty}^\infty \exp\left(sx^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \exp\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \end{aligned} \tag{9}$$

abbiamo che $\mathrm{MGF}_T(s) < \infty$ se e solo se $s - 1/2 < 0$, ossia $s < 1/2$. In tali casi è anche possibile calcolare (ma non era richiesto) riconducendosi ad una densità gaussiana standard con il cambio di variabile $z = \sqrt{1-2s}x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-2s)x^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{1-2s}}. \tag{10}$$

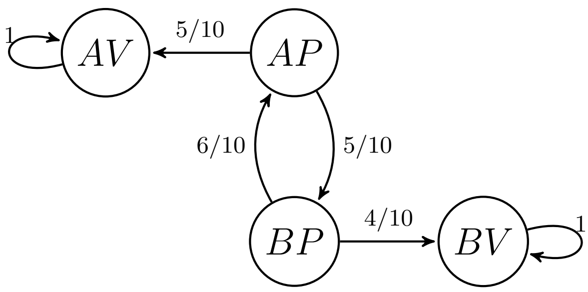
Problema 3

Alice e Beatrice giocano al seguente gioco di carte[1]. Alice ha inizialmente una sola carta di cuori in mano, mentre Beatrice ha due carte: una di cuori e una di picche. Nessuna rivela le proprie carte all'altra. Alternandosi, ciascuna deve pescare dalla mano dell'altra una carta e metterla nella propria mano, e la prima giocatrice che pesca dall'altra una carta di cuori vince e il gioco termina. La prima a pescare è Alice, che però è leggermente più abile di Beatrice nel farle pescare la carta di picche, mentre Beatrice è un po' meno abile. Precisamente, supponiamo che la probabilità che Alice peschi la carta di picche dalla mano di Beatrice sia sempre 50%, mentre la probabilità che Beatrice peschi la carta di picche da Alice sia sempre 60%.

1. Descrivere la partita tra Alice e Beatrice come una catena di Markov su un insieme di quattro stati: AP = "Alice pesca da Beatrice", BP = "Beatrice pesca da Alice", AV = "Alice vince", BV = "Beatrice vince". Classificarne gli stati e determinare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare la probabilità che Alice vinca alla sua seconda estrazione dalla mano di Beatrice.
3. Determinare la probabilità che il gioco sia vinto da Alice.

Una soluzione:

Possiamo rappresentare la catena di Markov con il seguente grafo:



1. GLi stati AP e BP sono transitori, i rimanenti ricorrenti. Le classi chiuse (irriducibili) sono due $\{AV\}$, $\{BV\}$. Tutte le distribuzioni invarianti sono del tipo $(0,0,\alpha,1-\alpha)$, dove $\alpha \in [0,1]$ e abbiamo ordinato gli stati come AP, BP, AV, BV.

2. Sappiamo che inizialmente la catena si trova in AP. Si tratta di calcolare la probabilità del cammino $AP \to BP \to AP \to AV$, che è $50\% \cdot 60\% \cdot 50\%$.

[1] una versione semplificata del gioco dell'asino, detto anche della vecchia o dell'uomo nero

3. Si tratta di calcolare $Q^{\infty}_{AP\to AV}$. Impostiamo una prima equazione (proveniente dal sistema $Q^{\infty} = Q^{\infty} Q$):

$$Q^{\infty}_{AP\to AV} = Q_{AP\to AV} Q^{\infty}_{AV\to AV} + Q_{AP\to BP} Q^{\infty}_{BP\to AV} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} Q^{\infty}_{BP\to AV} \tag{11}$$

da cui vediamo che dobbiamo anche impostare un'equazione per $Q^{\infty}_{BP\to AV}$:

$$Q^{\infty}_{BP\to AV} = Q_{BP\to BV} Q^{\infty}_{BV\to AV} + Q_{BP\to AP} Q^{\infty}_{AP\to AV} = \frac{6}{10} Q^{\infty}_{AP\to AV}. \tag{12}$$

Sostituendo nella prima equazione, troviamo quindi

$$Q^{\infty}_{AP\to AV} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} Q^{\infty}_{AP\to AV} \quad \Rightarrow \quad Q^{\infty}_{AP\to AV} = \frac{5}{7}. \tag{13}$$